

Wiskunde op materieel kennisniveau

Een voorbeeld

*Peter van 't Riet, Jan Kroon,
Annette van der Wal*

1 Inleiding

Het gebruik van levensechte materialen in de wiskunde van het voortgezet onderwijs is alles behalve de gewoonste zaak van de wereld. Wie de meest gebruikte wiskundemethoden van het lbo, mavo, havo en vwo doorbladert, zal slechts zelden leerstof tegenkomen waarin materialengebruik een essentiële rol speelt. Als het al voorkomt dan beperkt het zich meestal tot een aantal eenvoudige zaken, zoals het knippen van figuren uit de vlakke meetkunde¹, het knippen en vouwen van uitslagen van lichamen in de ruimtemeetkunde², het werken met getalstroken³, het gebruik van een spiegel⁴ of een kaartspel⁵. In sommige wiskundemethoden voor het voortgezet onderwijs is zelfs niets van materialengebruik terug te vinden⁶.

Ook in de Nederlandse didactiek van de wiskunde is er voor het gebruik van materialen in de wiskunde van het voortgezet onderwijs relatief weinig of geen aandacht. Het aantal artikelen dat aan dit onderwerp werd gewijd in de laatste tien jaargangen van Euclides (1976-1986) is op de vingers van één hand te tellen⁷. In andere Euclides-artikelen vinden we incidenteel vermeldingen van materialengebruik in het kader van het wiskundeonderwijs. Deze voorbeelden blijven echter grotendeels beperkt tot het knippen en verschuiven van figuren. Vele van deze artikelen gaan bovendien niet over de wiskunde van het gewone voortgezet onderwijs⁸, maar over wiskunde in het basisonderwijs en op de pedagogische academie⁹, in het blindenonderwijs¹⁰, of in het individueel voortgezet kunstzinnig onderwijs¹¹. Tevens treffen we in een aantal Euclides-artikelen voorbeelden van materialengebruik

aan met betrekking tot onderwijs in landmeetkunde¹², Hewet-wiskunde¹³, IOWO-pakketjes¹⁴. Eén keer zelfs betreft het wiskundegebruik in de privésfeer¹⁵.

Ook in de Nieuwe Wiskrant is de aandacht voor het gebruik van levensechte materialen niet al te groot. In de eerste drie jaargangen vinden we slechts één artikel dat duidelijk gewijd is aan de materiële onderbouwing van een stuk wiskundeonderwijs¹⁶. Desondanks is het aantal artikelen met voorbeelden van materialengebruik hier verhoudingsgewijs omvangrijker dan in Euclides. Ook nu gaat het echter vaak niet om het gangbare wiskundeonderwijs¹⁷, maar om basisonderwijs¹⁸, Hewet-wiskunde¹⁹, rekenonderwijs²⁰, of vakdidactisch onderwijs²¹.

Deze schaarste met betrekking tot materialengebruik in de wiskunde van het voortgezet onderwijs treft men eveneens aan in het standaardwerk 'Didactiek van de wiskunde' van Van Dormolen (1976). Tevergeefs zal men daarin iets zoeken dat met dit onderwerp te maken heeft. Met het boek 'Wiskundeonderwijs nu' van Lagerwerf (1982) is het in dit opzicht iets beter gesteld. Men vindt er onder de titel 'Wiskunde tastbaar maken' een kort hoofdstuk, waarin het belang uiteengezet wordt van wat Lagerwerf 'handwerk' noemt²². Ook elders in het boek treft men hier en daar onderwerpen aan in deze sfeer, bijvoorbeeld bij de bespreking van de zogenaamde Russische methode²³. Vaak gaat het bij Lagerwerf echter om wat men in termen van de Russische leerspsychologie 'gematerialiseerde mentale handelingen' zou kunnen noemen, zoals het tekenen van figuren en het uitknippen en verschuiven van hun onderdelen.

Gezien de toegenomen aandacht die er de laatste jaren in ons land onder invloed van het voormalige IOWO is voor concretisering van het wiskundeonderwijs, is de geringe aandacht voor het gebruik van materialen in de wiskunde van het voortgezet onderwijs verbazingwekkend. De IOWO-pakketjes voor het voortgezet onderwijs tonen relatief nog de meeste aandacht voor materialengebruik. Het beperkt zich daarbij echter tot de onderbouw. In de bovenbouwpakketjes treffen we wel veel context, maar geen materialengebruik aan²⁴. Dit is niet zo verwonderlijk als we zien dat het begrip 'context' het centrale begrip is waarop het werk van het IOWO ten behoeve van het voortgezet onderwijs

was gestoeld. De vele concretiseringen doen vrijwel steeds een beroep op het concreet-mentale kennisniveau van de leerlingen, waarbij de materialisering zich vooral beperkt tot het maken van tekeningen en grafieken. In het grote geheel van de wiskunde van het voortgezet onderwijs spelen de IOWO-pakketjes bovendien slechts een beperkte rol.

Het gebruik van materiële leermiddelen in de eigenlijke zin van het woord, waarmee de leerlingen motorische handelingen kunnen en moeten verrichten als ondersteuning van het leren van wiskunde, is dus een weinig ontwikkeld gebied. Het blijft in het voortgezet onderwijs voornamelijk beperkt tot wat elementaire meetkunde en kansrekening. Wie als wiskundeleraar meer wil, zal of zijn blik op het buitenland moeten richten, of het enthousiasme en de creativiteit moeten opbrengen zelf materialen te ontwerpen en te maken. Want ook een leermiddelenindustrie voor deze sector van het onderwijs kent Nederland niet.

Het is onze bedoeling in een aantal artikelen de aandacht te vragen voor het gebruik van levensechte materialen bij het onderwijzen van wiskunde aan 12- tot 16-jarigen. Veel van wat daarbij op papier komt, zal een voorlopig karakter hebben, daar de praktijk op dit gebied slechts weinig omvangrijk is. Een probleem is bovendien, dat het niet zo moeilijk is van tijd tot tijd leuke materialen te bedenken bij allerlei leerstof, maar hoe er mee gewerkt moet worden en of bepaalde materialen wel de beoogde ondersteuning van het leerproces geven, dat is van achter het bureau niet vast te stellen. Daarom zullen we zo nu en dan verslag doen van enkele pogingen om het gebruik van de ontworpen materialen aan de praktijk te toetsen. Geen groot opgezet onderzoek dus, maar probeersels zoals elke leraar en lerares die in de eigen les zou kunnen uitvoeren. Daarmee is dan ook een groot deel van dit eerste artikel gevuld. Een voorbeeld van materiaalengebruik, niet om precies te laten zien hoe dat nu wel moet, maar alleen om er achter te komen wat daaraan allemaal vast zit. In de volgende afleveringen zal er tevens plaats worden ingeruimd voor wat meer theoretisch getinte overwegingen.

2 De omtrek van de cirkel

De relatie tussen de omtrek van de cirkel en zijn straal of diameter wordt in alle wiskundemethoden voor het voortgezet onderwijs behandeld. Het onderwerp leent zich uitstekend tot het verrichten van meethandelingen en het in relatie met elkaar brengen van de meetresultaten. Desondanks refereren slechts twee van de vijf door ons bekeken wiskundemethoden aan dergelijke meethandelingen:

- In *Passen en Meten*²⁵ wordt slechts meegedeeld dat het getal pi bij de omtrek en oppervlakte van een cirkel een grote rol speelt. Als je de cirkelomtrek door de diameter deelt, vind je altijd ongeveer 3.
- *Moderne Wiskunde*²⁶ vraagt metingen te verrichten aan één conservenblik. De verkregen verhouding wordt pi genoemd, hetgeen ongeveer gelijk is aan $3\frac{1}{7}$. Daar het bij één meting blijft, zal dit het leerproces nauwelijks ondersteunen. In de praktijk zullen vele leraren deze meting waarschijnlijk overslaan, al was het alleen al omdat het de moeite niet loont voor één meting met conservenblikjes te gaan slepen.
- *Ook Denken, Doen en Begrijpen*²⁷ biedt de mogelijkheid tot het verrichten van metingen. In het lbo-deel moet er echter een touwtje op een cirkel gelegd worden. Een vrijwel onmogelijke opgave, die bovendien tot onnauwkeurige resultaten leidt en daarom in de praktijk wel vaak zal worden overgeslagen. In het mavo-deel moet het koordje om een zelfgemaakte cilinder worden gespannen. De omtrek wordt door de middellijn gedeeld. Het boek merkt op dat we bij nauwkeurig werken het getal 3,14 vinden, ofwel bij benadering pi. Stelt men zich echter voor dat de leerlingen de cilinder van karton of papier maken, dan zullen zij wegens de vervorming van het materiaal nooit nauwkeuriger kunnen werken dan b.v. $24,0/7,3 = 3,3$. Ook hier dus een niet erg doordachte werkwijze, die gemakkelijk overgeslagen zal worden.
- In de methode *Getal en Ruimte*²⁸ is de cirkel waar het om gaat, ingebed in de plattegrond van een atletiekbaan. De lengte van de baan is al bepaald, evenals die van de middellijn van de (halve) cirkel. Ook de verhouding 'omtrek staat tot middellijn' wordt door het boek voorgerekend.
- De methode *Sigma*²⁹ pakt het probleem geheel abstract aan. Via gelijkvormigheid van cirkels wordt 'bewezen' dat de verhouding omtrek staat

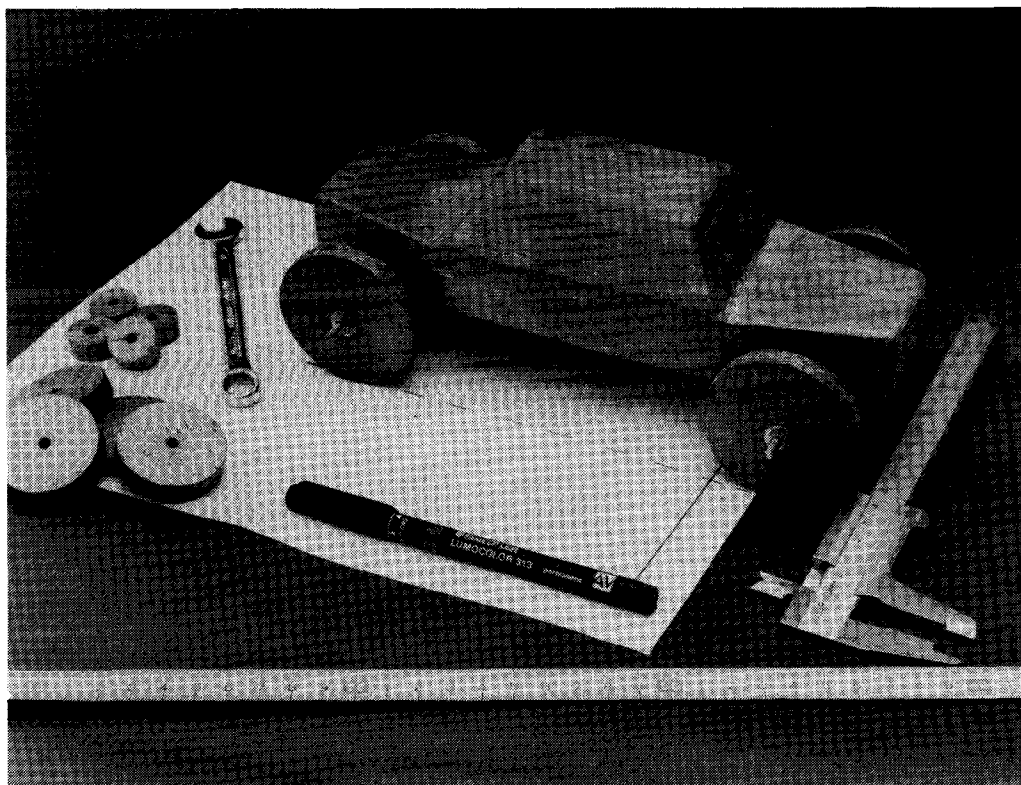
tot middellijn voor alle cirkels gelijk is. Metingen zijn op dit niveau van wiskunde bedrijven in het geheel niet aan de orde.

De mogelijkheden tot materialisering die het onderwerp 'verhouding omtrek-diameter' biedt, worden in de gangbare methoden dus niet of nauwelijks benut. Dit is alleen al jammer, omdat de praktische toepassing van het onderwerp – voor zover leerlingen er ooit mee te maken zullen krijgen – in het algemeen een bij uitstek materieel karakter zal hebben. In het verdere wiskundeonderwijs zelf komt het onderwerp slechts zelden terug. In de volgende paragraaf beschrijven we een mogelijkheid het onderwerp 'verhouding omtrek-diameter' op een meer materiële manier aan de leerlingen te presenteren in een enigszins levensechte context. Daarna volgen enige observaties van het onderwijsleerproces van een aantal leerlingen, een evaluatie van het gebruikte lesmateriaal en tenslotte een inventarisatie van aspecten aan wiskundeleeren met behulp van materiële voorwerpen.

3 De omtrek van de cirkel op materieel niveau

3.1 Het lesmateriaal

Wil men het verband tussen diameter en omtrek van de cirkel de leerling langs materiële weg duidelijk maken, dan ligt het voor de hand dit te doen door middel van meethandelingen waarvan men de resultaten met elkaar in verband brengt. Er zijn dan in principe twee mogelijkheden om de omtrek van een cirkelvormig lichaam te meten. In de eerste plaats kan men een touwtje of iets dergelijks om het betreffende lichaam leggen en daarvan de lengte opmeten. In de tweede plaats kan men het cirkelvormige lichaam laten rollen over een vlak oppervlak en de afgelegde afstand na één omwenteling laten opmeten. Deze tweede methode heeft het nadeel dat de meting van de omtrek wat indirecter geschiedt, maar opent de mogelijkheid van een realistische context met behulp van wielen aan voertuigen. Bij de ontwikkeling van het practicummateriaal werd voor deze methode gekozen. Er

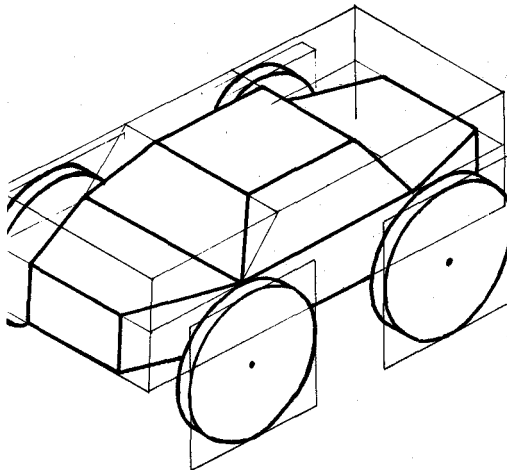


Het lesmateriaal

werd een model van een auto gemaakt met de mogelijkheid er wielen van verschillende grootte onder te zetten (zie foto 1). De leerlingen zouden zelf de wielen kunnen monteren en demonteren. Gekozen werd voor drie verschillende diameters. Ook werd een 'weg' in de vorm van een plaat board gemaakt. Het materiaal bestond uit 1 auto, 4 wielen gemerkt A, vier wielen gemerkt B, vier wielen gemerkt C, 8 moertjes, 8 ringetjes, 2 assen en een weg. Daaraan werd het volgende gereedschap toegevoegd: een moersleutel, een schuifmaat, een meetlat, 3 werkbladen om op de weg te leggen en een zwarte viltstift. Het geheel werd opgeborgen in een doos. Als de leerlingen aan het werk beginnen, bevindt de auto zich in de doos en is voorzien van de 4 wielen A.

Belangrijk was nu de vraag welke instructies de leerlingen bij het ontworpen materiaal zouden moeten krijgen. Een mogelijkheid was hun een korte opdracht te geven in de trant van: 'Meet diameter en omtrek van de drie soorten wielen en ga na welk verband er bestaat tussen beide grootheden'. Te verwachten daarbij was echter dat er heel veel zou misgaan, hetgeen het beoogde leerproces zou kunnen schaden of zelfs onmogelijk maken, tenzij de leraar voortdurend zou ingrijpen. Daarom werd besloten een instructie te schrijven die het de leerlingen van stap tot stap zou duidelijk maken, wat zij moesten doen met de materialen. Vervolgens werd een enigszins op geprogrammeerde instructie gelijkende reeks opdrachten ontworpen. Daarbij werd de rol van de leerkracht tot een minimum beperkt en getracht de kans op het maken van fouten door de leerlingen zo klein mogelijk te doen zijn (zie de instructiebladen).

OMTREK CIRKEL



Onnette van der Wal

- 1 -

OMTREK VAN EEN CIRKEL

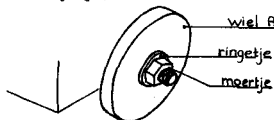
Materiaal: Opberekist met daarin:

auto
4 wielen gemerkt A
4 wielen gemerkt B
4 wielen gemerkt C
8 moertjes
8 ringetjes
2 assen
weg

Benodigd gereedschap: sleutel
schuifmaat
maatlat
papierpen met aanwijzingen
zwarte stift

De auto uit de doos heeft vier wielen.

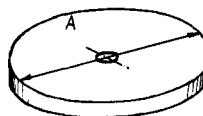
Opdracht 1. Haal de wielen van de auto met behulp van de volgende aanwijzingen.



a. Draai met de sleutel het moertje van het asje af. Haal daarna het ringetje er af en vervolg het wiel.

b. Herhaal dit bij de drie andere wielen.

Opdracht 2.



Hierboven zie je wiel A getekend. De diameter van het wiel is aangegeven door de pijl.

Meet de diameter van wiel A met de schuifmaat of met de maatlat. Wiel A heeft een diameter van cm.

Instructiebladen

Opgave 1

Meet de diameter van wiel B.
Wiel B heeft een diameter van cm.

Opgave 2

Meet de diameter van wiel C.
Wiel C heeft een diameter van cm.


Opgave 3

Vul de volgende tabel in:

Wiel	diameter
Wiel A	cm
Wiel B	cm
Wiel C	cm

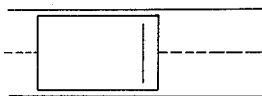
Opgave 4

Monteer de wielen A weer aan de auto met behulp van de volgende aanwijzingen.

- Met de asje door de bovenste gaatjes. 
- Doe het rijschijfje om het asje, daarna het wiel en als laatste draai je het moertje vast.
- Doe dit ook aan de andere kant van het asje.
- Neem het tweede asje aan de andere kant van de auto en doe ook deze door het bovenste gaatje.
- Voer b en c ook voor dit asje uit.

Opgave 5

Pak nu werkblad 1 en leg dit op de weg.



Op de weg zie je precies waar je het papier moet neerleggen.

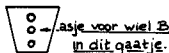
Opgave 6

Meet de afstand van de lijn tot het punt. Dit is de afstand die het autootje heeft afgelegd na 1 rondraaien van het wiel A.

De afstand die wiel A heeft afgelegd na 1 maal rondraaien is cm.

Opgave 7

Haal de 4 wielen van de auto af (moertjes en rijschijfjes). Zet nu de 4 wielen B aan de auto



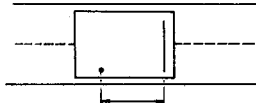
Opgave 8

Zet de auto weer op het werkblad en zorg ervoor dat de lijn op het wiel de lijn op het werkblad raakt.



Opgave 9

Om weer met de auto rijden totdat het wiel weer éénmaal is rondgedraaid. Zet een stip op het papier.



Opgave 10

Meet de afstand van de lijn tot het punt.

De afstand die wiel B heeft afgelegd na éénmaal rondraaien is cm.

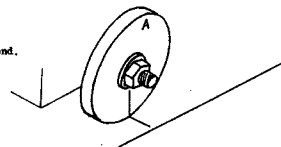
Opgave 11

Haal de 4 wielen van het autootje af en zet de 4 wielen C aan de auto.



Opgave 12

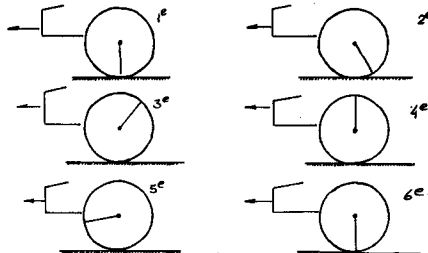
Op de wielen zijn lijnen getekend.



Zet de auto op het werkblad zo dat de lijn op het wiel de lijn op het werkblad raakt. (zie de tekening hieronder) Voer dit uit bij een voorwiel van de auto.

Opgave 13

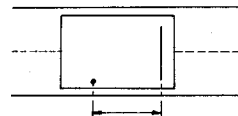
Om nu rustig met de auto rijden recht over de weg. Let daarbij op het voorwiel, je ziet dan het volgende:



Kijk of dat inderdaad het geval is.

Opgave 14

Zodra de lijn die op het wiel getekend is weer beneden is (situatie 6) stop dan met rijden. Zet een stip op het papier.



Opgave 15

Neem werkblad 111. Zet de auto zo op het werkblad dat de lijn die op het wiel getekend is de lijn op het werkblad raakt.

Opgave 16

Om met de auto rijden totdat het wiel weer éénmaal is rondgedraaid. Zet een stip op het papier.

Opgave 17

Meet de afstand van de lijn tot de punt.

De afstand die wiel C heeft afgelegd na éénmaal rondraaien is cm.

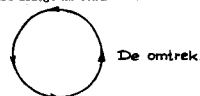
Opgave 18

Maak de volgende tabel af.

Wiel	De afstand afgelegd na éénmaal rondraaien
Wiel A	cm
Wiel B	cm
Wiel C	cm

Opgave 19

De afstand die het wiel aflegt na éénmaal rondraaien dat is de omtrek van het wiel.



Opgave 20

Maak de volgende tabel af.

diameter	omtrek
cm	cm
cm	cm
cm	cm

Opgave 21

Wat is groter de omtrek van wiel A of de diameter.
Antwoord :

Opdracht 24

Hoeveel keer zo groot?

Antwoord:

Opdracht 25

Wat is groter de omtrek van wiel B of de diameter?

Antwoord:

Opdracht 26

Hoeveel keer zo groot?

Antwoord:

Opdracht 27

Wat is groter de omtrek of de diameter van wiel C?

Antwoord:

Opdracht 28

Hoeveel keer zo groot?

Antwoord:

Opdracht 29

Als je een wiel hebt met een diameter van 10 cm, wat is dan de omtrek?

De omtrek is cm.

Opdracht 30

Een autowiel heeft een diameter van 50 cm. Wat is de omtrek?

De omtrek is cm.

Klassengesprek

Leraar: Zou het echt 3x zo groot zijn? Hebben jullie misschien verkeerd gemeten.

Leerlingen: We hebben niet precies 3 gemeten.

Iln komen tot de ontdekking na nog een keer meten en rekenen dat het getal telkens iets groter dan drie is.

3.2 De lessen

De leerlingen zouden de leerstof zelfstandig moeten doornemen. Besloten werd het hen in paren te laten doen, zodat zij elkaar zouden kunnen instrueren en corrigeren. Bovendien zou er dan iets zichtbaar kunnen worden van de sociale functie die het werken met levensechte materialen in het wiskundeonderwijs zou kunnen hebben. Bij het doorwerken van de leerstof zou de docent vooral als observant aanwezig zijn en het onderwijsleerproces niet in de vorm van uitgebreide protocollen maar in algemene termen beschrijven. Na afloop zou een kort gesprek met de leerlingen worden gehouden om te controleren of zij inderdaad begrepen dat omtrek en diameter in een vaste verhouding tot elkaar staan.

Aldus samengesteld werd de leerstof afgenomen op vier paren leerlingen van een Ito/ito-school. Om zicht te krijgen op het functioneren van de leerstof op verschillend niveau is het pakketje uitgeprobeerd op leerlingen uit verschillende jaargroepen en uit verschillende afdelingen. Er werden vier paren gevormd. Hieronder volgen de observatieverslagen van de onderwijsleerprocessen, het ene wat uitgebreider dan het andere.

3.3 Observaties van het leerproces

a Lto 2, Karel en Patrick

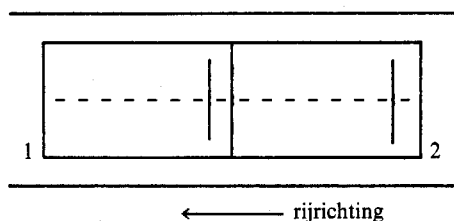
Karel en Patrick zitten in de tweede klas van het Ito. Zij hebben, wanneer zij met het leerstofpakketje aan het werk gaan, de tekst voor zich liggen en de doos met de auto naast zich staan. De eerste bladzijde van de tekst wordt rustig maar snel doorgelezen. Ze doen dat ieder voor zich. Patrick, die het dichtst bij de doos zit, kijkt er af en toe in. Wat in de doos zit, is na een poosje voor hem leuker dan nog langer de tekst te moeten lezen. Maar Karel is nog niet zo ver. Toch pakt Patrick de auto en dan is ook Karel opeens klaar met lezen. De tekst wordt aan de kant geschoven en de auto wordt al gauw 'gesloopt'. Karel is vol bewondering voor de auto en roept enkele keren uit: 'Gave Mercedes, zeg!' Patrick houdt de auto voor zich en gaat hem met een professioneel gebaar keuren. Dan bedenken ze dat ze moeten beginnen met de opdrachten.

Ze lezen opnieuw de tekst, pakken al snel de liniaal uit de doos en gaan meten. Ze doen dit beiden, na elkaar, maar krijgen verschillende antwoorden. Het blijkt dat ze de tekst niet goed hebben gelezen. Patrick heeft de straal van het wiel gemeten en Karel de diameter. Het kost ze nogal wat tijd voor ze door hebben dat een van beiden een fout heeft gemaakt en wie dat was. Ze lezen de tekst te snel, waardoor ze steeds opnieuw moeten beginnen. Toch vinden ze het blijkbaar niet vervelend, want ze blijven rustig fouten maken om die vervolgens weer te verbeteren. Deze fouten worden telkens door henzelf ontdekt.



Het rijden met het autootje

Karel en Patrick gaan steeds op zoek naar de opdrachten waarin zij iets met het autootje moeten doen. De verdere tekst daaromheen is dan te veel voor ze. Bij opdracht 6 zetten ze de wielen aan de auto en gaan ze ermee rijden. Dat is een hele ervaring voor ze. Patrick buigt zich voorover en wil de auto vooruitduwen. Een van de wielen blijft steken en Patrick zegt: 'Hij rijdt wel sterk!' Het wiel wordt wat losser gedraaid en de auto doet het nu goed volgens Patrick. Bij opdracht 7 aangekomen leggen de jongens twee werkbladen op de weg, hetgeen volgens de tekening in de tekst niet nodig is. Ze gaan over de werkbladen rijden en ontdekken wat ze moeten doen. Ze hebben daarvoor echter niet de tekst gelezen, maar zijn er door het heen en weer rijden van de auto achter gekomen. Ze leggen elkaar uit dat ze naar het lijntje op het wiel moeten kijken. Op de weg liggen de twee werkbladen achter elkaar (zie figuur 1). Ze zetten de auto met de voorwielen op werkblad 1 en met de achterwielen op werkblad twee en gaan rijden in de richting van de pijl. Op werkblad 1 wordt een stip gezet. Het andere werkblad wordt niet gebruikt.



Figuur 1 Weg bedekt met 2 z.g. werkbladen.

Als de jongens aan de wielen B toe zijn, gaat er iets mis. Ze draaien de wielen A van de auto af. Dat gebeurt met veel plezier. Deze wielen leggen ze op tafel en ze beginnen wat met elkaar te kletsen. Daarna lezen ze weer even in de tekst en pakken vervolgens de wielen A die ze zojuist op tafel hebben gelegd. Deze monteren ze weer aan de auto. Als ze klaar zijn, houden ze de auto voor zich en beginnen te lachen. Ze komen er achter dat ze 'stom' hebben gedaan en verwisselen 'in een ijtempo' de wielen A voor de wielen B. Als de auto klaar is, is het een leuke sportauto geworden, vinden ze. In de tijd die volgt, vliegen ze door de opdrachten heen. Dat leidt echter tot het maken van fouten, die ze ontdekken bij het invullen van de tabellen. Dan

moeten ze soms terug naar de tekst om te kijken waar het mis ging. Tussen de bedrijven door worden er allerlei opmerkingen gemaakt, vooral tijdens het monteren en demonteren van de wielen. Verbaasd zijn ze dat ze de wielen er elke keer weer moeten afhalen. De laatste opdrachten gaan heel snel en dan zijn ze opeens klaar. De tekst wordt weggeschoven. Patrick gaat nog wat rijden met de auto. Karel pakt zijn jojo en gaat voor zich uit zitten staren.

Na afloop wordt het werk samen met de jongens nagekeken. Heel verbaasd staan ze te kijken dat er voor alle drie de wielen dezelfde verhouding van diameter en omtrek uitkomt. Verteld werd ze dat dat het getal pi was. Daar hadden ze nog nooit van gehoord. Op de vraag waarom ze twee werkbladen hadden gebruikt, antwoordden ze dat ze de hele weg wilden bedekken. Ze vonden het heel leuk om te doen en zouden wel vaker op deze manier wiskunde willen hebben.

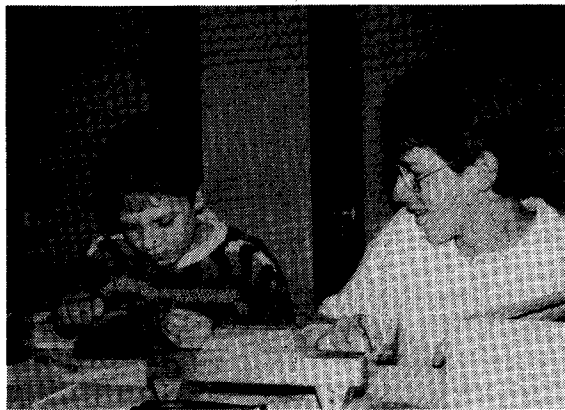
b Lto 3, Hans en René

Hans en René lezen eerst heel nauwkeurig de tekst en controleren of alles in de doos zit. Daarna meten zij de diameters van de wielen met de schuifmaat. Zij controleren elkaars metingen. René legt een werkblad op de weg en wil met de auto gaan rijden. Hans leest nog even de tekst, want hij is het niet eens met wat René doet. Daarna legt hij nog een werkblad op de weg. Bij het monteren van de wielen B vergeten zij te letten op de lijnen die er op getekend zijn. Sommige wielen hebben ze nu met de lijn naar binnen gemonteerd, waardoor deze onzichtbaar is geworden. Dat merken ze als ze gaan rijden. Ze halen de wielen er weer af en draaien deze om, zodat ze nu van alle vier de wielen de lijnen zien. Hans heeft ineens door dat dat helemaal niet nodig was: 'Bij één wiel de lijn zien is genoeg, hoor René!' Al de tijd werken ze goed samen en gaan probleemloos door de stof heen.

Als na afloop de gang van zaken met hen besproken wordt, blijken alle antwoorden goed te zijn. Voor alle zekerheid deed de docent samen met de jongens nog één meting heel precies en vertelde dat 3,14 de nauwkeurigste waarde was. Dat vonden ze heel leuk.



Veel plezier bij het monteren van de wielen



Het meten van de diameter

c Ito 3, Sjacco en Marco

Sjacco en Marco zijn speciaal voor ons onderzoekje uitgekozen. Ze zitten in 3 ito (individueel technisch onderwijs), afdeling installatietechniek, en werken volgens hun wiskundedocent voor wiskunde op A-niveau. Van Sjacco is bekend dat hij nauwelijks vijf minuten achter elkaar bij zijn werk kan blijven. Marco is erg rustig. Als ze de tekst voor zich hebben, beginnen ze te lezen. Ze doen dat heel nauwkeurig en wisselen gedurende die tijd geen woord met elkaar. Het duurt lang voordat ze de auto uit de doos pakken. Ze schijnen dat om een of andere reden niet te durven. Ze fluisteren wat met elkaar en het lijkt of ze ergens op wachten.

Na een poosje vertelt de docent dat ze de auto wel mogen pakken. 'O', zegt Sjacco, 'ik begreep er al niets van'. Dan demonteren ze de wielen en beginnen aan de meting. Sjacco meet echter de diameter van het in de tekst afgebeelde wiel in plaats van die van het echte wiel. Marco wijst hem op zijn fout. Sjacco reageert met: 'Waar zijn dan de wielen die ik moet meten?' Marco antwoordt: 'De wielen die aan de auto zaten'. Als Sjacco van zijn verbazing is bijgekomen, gaan ze de goede diameter meten. Er is nog even discussie over de vraag welk wiel ze zullen opmeten. Tenslotte besluiten ze het bij alle vier de wielen A te doen.

Sjacco heeft 39 cm gevonden. Als Marco het merkt, vraagt hij hem of hij echt denkt dat het wiel zo groot is. 'Dat kan toch nooit', zegt hij en vult daarna aan: 'Er moet een komma staan'. Als de diameters van de wielen zijn opgemeten, bergen ze alles weer op in de doos. Vervolgens halen ze alles weer uit de doos

tevoorschijn. Zo te zien doen ze het met veel lol. Het neerzetten van de auto op de weg levert de nodige problemen op. Eerst staat hij scheef. Ze snappen niet goed wat ze moeten doen. Toch komt de auto uiteindelijk goed op het werkblad te staan. Alle metingen verrichten ze twee keer, zodat ze beiden een antwoord hebben. Ze werken heel langzaam, maar lopen niet vast. Af en toe stellen ze een vraag aan de docent. Een van die vragen luidt, of ze dit nu elke week krijgen. Als de wielen B aan de auto zitten en ze de metingen uitvoeren, stuiten ze op een probleem. Eerst nu vergelijken ze hun meetresultaten met elkaar. Marco ontdekt dat 'zijn' auto een grotere afstand aflegt dan die van Sjacco. Sjacco zet de auto namelijk op de weg en rijdt er niet mee, maar meet nogmaals de diameter. Ze overleggen wat er fout is en vermoeden dat ze fout gelezen hebben. Dan ontdekt Sjacco dat het bij de afstand die de auto aflegt, gaat om de omtrek van het wiel en niet om de diameter. Hij roept uit: 'Omtrek is natuurlijk groter dan diameter!' 'Ja', merkt Marco op, 'dat zei ik toch'. Ze blijven voortdurend enthousiast bezig, wat vooral blijkt uit het feit dat ze fanatiek de opdrachten blijven lezen. Bij de nabespreking blijkt dat de gevonden antwoorden allemaal goed waren. Marco is verbaasd dat de omtrek altijd ongeveer driemaal zo groot is als de diameter. Hij denkt dat dat toevallig is en kan zich niet voorstellen dat het altijd zo mooi uitkomt. Daarom laat de docent ze nog een wiel opmeten en opnieuw komt er ongeveer 3 uit. Daarna zijn ze overtuigd en vinden ze het leuk dat het altijd uitkomt.

d Lto 4, Gert en Frits

Gert en Frits gaan aan het werk met het lesmateriaal, alsof ze elke dag zoiets doen. Ze lezen snel de aanwijzingen en de wielen worden vlot van de auto gehaald. Frits meet met de schuifmaat en Gert controleert het gevonden antwoord met de liniaal. Ze lezen de tekst heel precies en alles gaat goed. Ze hebben nergens problemen mee. De tabellen worden correct ingevuld. In stilte maken ze individueel de laatste opdrachten.

Bij de nabespreking van het werk zei Frits het erg gemakkelijk te hebben gevonden. Gert geloofde niet dat er altijd 3,14 zou uitkomen. Daarop vroeg de docent, waarom ze dat getal dan wel gebruikten bij de sommen van opdracht 29 en 30. Gert antwoordde: 'Dan is het misschien toch waar'. Op dat moment ging er bij Frits ineens een lampje branden: 'Dat getal is natuurlijk pi!' Toen begrepen ze het helemaal.

3.4 Evaluatie van het lesmateriaal

Alle vier de tweetallen hebben zonder grote problemen met het lesmateriaal kunnen werken. Wel was er een groot verschil in de tijd die zij voor het doorwerken ervan nodig hadden. De vierde-klassers waren er in ongeveer 30 minuten doorheen, terwijl de tweede- en derde-klassers er veel langer over deden. Met name de lto-3-leerlingen Hans en René deden er tamelijk lang over (bijna 60 minuten), mede omdat zij zeer nauwkeurig werkten.

Het lesmateriaal heeft voor de vier groepjes niet dezelfde functie gehad. Voor de vierde-klassers was de stof eenvoudig. De les had daarom meer het karakter van het ophalen of toepassen van oude kennis en een meer open opdracht was hier waarschijnlijk beter op zijn plaats geweest. Toch bleek tijdens de nabespreking, dat niet alle reeds aanwezige kennis van het onderwerp tijdens het doorwerken van de opdrachten had gefunctioneerd. Met name de Aha-Erlebnis van Frits dat het natuurlijk om het getal pi ging, laat zien dat – ook als het onderwerp al behandeld is – een herhaling van de stof op materieel niveau tot grotere integratie van kennis kan leiden. Feitenkennis die voordien wel aanwezig was, maar niet functioneerde, kan daardoor parate kennis worden, welke gemakkelijker is aan te wenden. Bovendien kan de materiële onderbouwing van een begrip het onthouden ervan vergemakkelijken.

Tussen de beide groepen derde-klassers was een groot verschil in benadering van het lesmateriaal. De lto-3-leerlingen Sjacco en Marco lieten telkens hun verbazing blijken, terwijl de lto-3-leerlingen Hans en René vrij ongeëmotioneerd, rustig hun werk deden. Beide tweetallen komen het begrip omtrek regelmatig tegen bij andere, praktische vakken en de leerstof fungeerde min of meer als verwerking en toepassing. Door de reële context van de afstand die een wiel bij een omwenteling aflegt, leren ze een van de functies die het begrip 'omtrek van een cirkel' vervult, nader kennen. Het lesmateriaal viel duidelijk bij hen in de smaak, waardoor hun motivatie om door te werken heel de tijd aanwezig bleef.

De tweede-klassers Karel en Patrick waren heel speels. Ze lazen de tekst niet goed en moesten echt aan het werk worden gezet. Hun interesse lag vaak meer bij het autootje dan bij de leerstof. We zien hier het gevaar dat het lesmateriaal door zijn vorm kan afleiden van de leerstof, waarvan het een concretisering is. De verhouding tussen omtrek en diameter van de cirkel hadden deze twee leerlingen nog niet eerder gehad en het getal pi kenden zij nog niet. Het lesmateriaal zou in hun geval dus kunnen dienen als inleiding of oriëntatie op de invoering van de omtrekformule.

We zien hier dat het gebruikte lesmateriaal in principe op twee verschillende manieren te gebruiken is in het wiskundeonderwijs. Allereerst zou het ingezet kunnen worden om de leerlingen aan de nodige



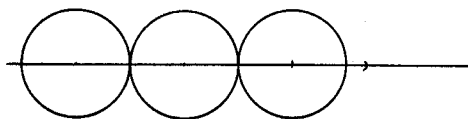
Het 'slopen' van het autootje

ervaringen te helpen op basis waarvan de omtrekformule kan worden ingevoerd. Uit oogpunt van wiskundeonderwijs is het wellicht een bezwaar dat daarvoor nogal veel niet-wiskundige activiteiten gepleegd moeten worden. Een groot deel van de door de leerlingen te verrichten handelingen bestaat uit nauwkeurig lezen en het uitvoeren van manipulaties met de materialen. Desondanks zou dit bij de ito-leerlingen en bij de lto-leerlingen in de lagere klassen wel eens bij uitstek de methode kunnen zijn om hen begrip van de wiskunde bij te brengen. Een tweede mogelijkheid, die te prefereren is in de hogere klassen van het lto, is het lesmateriaal te gebruiken voor verwerking en toepassing, maar dan in de vorm van meer open opdrachten. Deze mogelijkheid valt ook te overwegen voor mavo-, havo- en vwo-leerlingen. Met name het ontstaan van een grotere integratie van kennis en een grotere wendbaarheid van reeds geleerde begrippen en regels zou een belangrijk leerresultaat kunnen zijn op dit niveau van wiskundeonderwijs.

Tot slot van deze evaluatie merken we nog op dat de ontworpen tekst niet bedoeld is als een afgeronde behandeling van het onderwerp 'verhouding van omtrek en diameter'. Daarvoor geeft zij het onderwerp te fragmentarisch weer. De bedoeling van het lesmateriaal was niet anders dan enig zicht te krijgen op de mogelijke rol die levensechte materialen bij het leren van wiskunde zouden kunnen spelen. Wil men het gehanteerde idee van het autootje binnen een groter geheel van leerstof gaan gebruiken, dan wijzen we hier op een aantal beperktheden in de huidige tekst. Uitgaande van het model van kennisniveaus, door Van 't Riet eerder in Euclides gepubliceerd³⁰, kunnen we de volgende eventuele tekorten erin aanwijzen.

De regel 'omtrek van de cirkel is iets meer dan driemaal de diameter' wordt in feite in de opdrachten 24 t/m 28 geïntroduceerd op *concreet-symbolisch niveau*, dat wil zeggen met behulp van het verkregen getallenmateriaal. Deze regel had echter ook heel goed op het *materiële kennisniveau* zelf geïntroduceerd kunnen worden door bijvoorbeeld te laten onderzoeken hoeveel wielen er in rechte lijn op de afgelegde afstand gelegd zouden kunnen worden (zie figuur 2). Ook een nauwkeurige *verbale omschrijving* van de verrichte handelingen en het daaruit verkregen resultaat heeft niet tot het lesma-

teriaal behoord. Te denken valt aan een eventueel te memoriseren zin als: 'Meten we de diameter van een cirkel en zijn omtrek, dan vinden we steeds dat de omtrek iets meer dan driemaal de diameter is'. Zo'n zin of een aanverwante verbale omschrijving kan een enorme steun zijn bij de vorming van een mentaal schema. Ook het *abstract-symbolische kennisniveau* in de vorm van de formule $O = \pi \cdot d$ is niet in het lesmateriaal opgenomen. Wil men dus met het autootje in de wiskundelessen aan het werk, dan zal men de te verrichten materiële handelingen moeten inbedden in een breder geheel van kenniselementen. Ons onderzoekje toont slechts aan dat het zinvol zou kunnen zijn hier verder aan te gaan werken.



Figuur 2 De door een wiel na één omwenteling afgelegde weg is iets langer dan drie wielen met de diameters achter elkaar gelegd.

4 Aspecten van wiskundeleren op materieel niveau

Aan het slot van dit artikel willen we een korte opsomming geven van aspecten van wiskundeleren op materieel niveau. Mogelijk zal er in volgende artikelen de gelegenheid zijn op een aantal van deze aspecten wat nader in te gaan.

We noemen dan in de eerste plaats het *leerpsychologische* aspect. Het verrichten van handelingen aan materialen kan een essentiële rol spelen bij het leren van begrippen en regels. Met name in de leertheorie van Galperin speelt dit aspect van het leren een grote rol, hoewel de materialen waaraan gehandeld moet worden bij hem lang niet altijd even levensecht zijn. Ook kwam in ons onderzoekje het leerpsychologische aspect zo nu en dan duidelijk naar voren, bijvoorbeeld in de Aha-Erlebnis van Frits: 'Dat is natuurlijk het getal pi!'

Een tweede punt dat uit de weergegeven observaties naar voren komt, is dat van de *motivatie*. Alle acht leerlingen vonden het leuk op deze praktische manier wiskunde te krijgen. Zelfs de tweede-klas-sers, waarvan de motivatie het meest wisselend was, werkten door met een behoorlijke regelmaat.

In de derde plaats zitten er aan het werken met materialen vele *didaktische* kanten. Wil men hier regelmatig in het wiskundeonderwijs gebruik van maken, dan doemt er direct een aantal vragen op. Welke consequenties heeft het gebruik van materialen voor de organisatie van de wiskundeles? Wat gebeurt er als men niet aan twee maar aan achten-twintig leerlingen wil lesgeven met behulp van ma-terialen? In welke gevallen moet men wel of niet van materialen gebruik maken? Op welke wijze zal men er het beste gebruik van kunnen maken? Alleen voor demonstratiedoelen of vooral ook om de leer-lingen er zelf ervaringen mee te laten opdoen?

Een vierde aspect betreft de vraag welke bijdrage het gebruik van materialen zou kunnen leveren aan *differentiatie* in het wiskundeonderwijs. Onze ob-servaties tonen duidelijk aan dat verschillende leer-lingen heel verschillend te werk gaan met hetzelfde lesmateriaal. Wellicht zijn er typen leerlingen bij wie materialengebruik een positieve invloed heeft op de wiskundige prestaties, terwijl er andere typen zijn bij wie het nauwelijks enig effect heeft.

Wil men het gebruik van materialen tot een geïnte-grereerd onderdeel van het wiskundeonderwijs maken, dan doemen er vragen op op het terrein van de *curriculumontwikkeling*. De zaak wordt interes-santer naarmate men materialen weet te ontwikke-len die op heel verschillende niveaus van wiskunde-onderwijs en met heel verschillende soorten leerstof gebruikt kunnen worden.

Als laatste komt dan ook het terrein van de *toetsing* van het onderwijs in het vizier. Want als het gebruik van materialen een regelmatig weerkerend ver-schijnsel zou worden in de wiskunde van het voort-gezet onderwijs, moeten dergelijke materialen dan ook geen rol gaan spelen bij de toetsing van de door de leerling verworven kennis en vaardigheden? Een vraag die wel heel ver weg lijkt te liggen!

Noten

- 1 B.v. in: Denken, Doen en Begrijpen, deel 2def (mavo), p. 68 e.v.; deel 3cd (mavo), p. 13 e.v.; Moderne Wiskunde, 4e editie, deel 1, p. 11.
- 2 B.v. in: Denken, Doen en Begrijpen, deel 1abc (lbo), p. 35; Passen en meten, deel 2, p. 24.
- 3 B.v. in: Denken, Doen en Begrijpen, deel 1abc (lbo), p. 79.
- 4 B.v. in: Moderne Wiskunde, 4e editie, deel 2, p. 30.
- 5 B.v. in: Moderne Wiskunde, 4e editie, deel 2, p. 114.
- 6 Dit is b.v. het geval met de methoden 'Sigma' en 'Getal en Ruimte'.
- 7 Alleen zijn als zodanig te beschouwen: Krammer en Huurnink-Hoddenbach, 1979; Lagerwerf, 1978; Lagerwerf, 1979.
- 8 Wat het voortgezet onderwijs betreft: Van Hiele, 1977, p. 132; Knip en Schoemaker, 1980, p. 392; Muskens en De Porto, 1981, p. 426; Meester, 1982, p. 91; Van Dormolen, 1984, p. 331 e.v.; Van 't Riet, 1985, p. 186 e.v.; Van den Brink, 1985, p. 225; Van de Craats, 1986, p. 231 e.v.
- 9 Goffree, 1977a, p. 365 e.v.; 1977b, p. 8 e.v.; 1977c, p. 86 e.v.; 1977d, p. 129.
- 10 Van de Ven, 1980, p. 145 e.v.
- 11 Van Baalen, 1977, p. 123 e.v.
- 12 Kemme en Nagtegaal, 1981, p. 401 e.v.
- 13 Van Lint, 1985, p. 240.
- 14 Schoemaker, 1979, p. 16; Vredenduin, 1981, p. 49 e.v.
- 15 Van 't Riet en Zwaneveld, 1982, p. 334 e.v.
- 16 Streefland, 1984, p. 29 e.v.
- 17 Van Dormolen, 1982, p. 32, 33; Schoemaker, 1983, p. 49 e.v.; Maurer-Crutzen, 1984, p. 3 e.v.
- 18 Van den Brink, 1981, p. 34, 35; Broekman, 1982, p. 16.
- 19 Kindt, 1981, p. 16 e.v.; Verhage, 1982, p. 24; Meester, 1984, p. 18 e.v.; Koerts en Visser, 1984, p. 32 e.v.
- 20 Goffree en Pelle, 1983, p. 7 e.v.
- 21 Smid en Verweij, 1982, p. 30, 31.
- 22 Pag. 39 e.v. Overigens bevat dit hoofdstuk vrijwel letterlijk de tekst van een eerder in Euclides gepubliceerd artikel (Lagerwerf, 1979).
- 23 Pag. 128 e.v.
- 24 Materialengebruik vinden we in de pakketjes Pythagoras, Reis om de wereld, Regelmatige figuren, Belvia, Zie je wel, Spionnen in de stad, Schaduw en diepte. Behalve het tekenen van figuren komen er in de overige pakketjes geen levensechte materialen voor, waaraan werkelijk gehandeld moet worden.
- 25 Passen en Meten, deel 6, p. 33 e.v.
- 26 Moderne Wiskunde, 4e editie, deel 2, p. 76 e.v.
- 27 Denken, Doen en Begrijpen, deel 2 lbo, p. 154; deel 3cd mavo, p. 13 e.v.
- 28 Getal en Ruimte, deel 2m, p. 137 e.v.
- 29 Sigma, deel 3m, p. 141 e.v.
- 30 Van 't Riet, 1983; Van 't Riet, 1985.

Literatuur

- Baalen, K. van, *Tweedegraadsfuncties kinderspel*, Euclides 53, 4, 1977, p. 123-125.
- Brink, F. J. van den, *Wiskundige wereldoriëntatie – een onderzoek naar wiskunde bij kinderen*, Nieuwe Wiskrant Proefnummer, 1981, p. 34-35.
- Brink, P. W. van den, 'In de wiskundeles', *De commutatieve eigenschap*, Euclides 60, 6, 1985, p. 225.
- Broekman, H. G. B., *Variabelen, letters, onbekenden, bekende onbekenden*, Nieuwe Wiskrant 1, 3, 1982, p. 15-19.
- Craats, J. van de, *Voorbeelden*, Euclides 61, 7, 1986, p. 231-240.
- Dormolen, J. van, *Didactiek van de Wiskunde*, Utrecht, 1976, 2e druk.
- Dormolen, J. van, *Sinusachtige functies*, Nieuwe Wiskrant 1, 3, 1982, p. 30-36.
- Dormolen, J. van, *Leren wat bewijzen is*, Euclides 59, 7, 1984, p. 325-334.
- Goffree, F., *Vakdidaktische Notities 3*, Euclides 52, 10, 1977a, p. 365-368.
- Goffree, F., *Vakdidaktische Notities 4*, Euclides 53, 1, 1977b, p. 8-12.
- Goffree, F., *Vakdidaktische Notities 6*, Euclides 53, 3, 1977c, p. 83-88.
- Goffree, F., *Vakdidaktische Notities 7*, Euclides 53, 4, 1977d, p. 129-134.
- Goffree, F., Pelle, J. ter, *Voortgezet rekenen in de brugklas*, Nieuwe Wiskrant 3, 1, 1983, p. 3-11.
- Hiele, P. M. van, *Hoe moet men...*, Euclides 52, 5, p. 128-141.
- Kemme, S., Nagtegaal, C., *Landmeetkunde op school*, Euclides 56, 9, 1981, p. 401-408.
- Kindt, M., *Determinant en spijkerbord*, Nieuwe Wiskrant Proefnummer, 1981, p. 16-21.
- Koerts, E. M., Visser, M. C., *Betekenisvol leren met Hewet*, Nieuwe Wiskrant 3, 3, 1984, p. 32-37.
- Krammer, H., Huurnink-Hoddenbach, E., *Praktikum in de wiskundeles*, Euclides 55, 4, 1979, p. 140-152.
- Lagerwerf, B., *Wiskunde 'doen'*, Euclides 54, 4, 1978, p. 118-120.
- Lagerwerf, B., *Wiskunde tastbaar maken*, Euclides 55, 1, 1979, p. 21-24.
- Lagerwerf, B., *Wiskundeonderwijs nu*, Groningen, 1982.
- Lint, H. van, *Hewetaardigheden*, Euclides 60, 6, 1985, p. 237-240.
- Maurer-Crutzen, C., *Breien met wiskunde*, Nieuwe Wiskrant 3, 3, 1984, p. 3-8.
- Meester, F., *Met wiskunde meer vrouw(?)*, Euclides 58, 3, 1982, p. 91-100.
- Meester, F., *Ruimte voor de ruimte*, Nieuwe Wiskrant 3, 3, 1984, p. 17-20.
- Muskens, L., Porto, W. de, *Markt op een themadag*, Euclides 56, 9, 1981, p. 425-428.
- Riet, N. van 't, Zwaneveld, B., *Wiskundige houding*, Euclides 57, 9, 1982, p. 333-346.
- Riet, S. P. van 't, *Zes kennisnivo's in het wiskundeonderwijs*, Euclides 58, no. 7, 1983, p. 241-247.
- Riet, S. P. van 't, *Zes kennisnivo's, Een nadere uitwerking*, Euclides 60, 5, 1985, p. 181-188.
- Schoemaker, G., *De aarde draait*, Euclides 55, 1, 1979, p. 13-20.
- Schoemaker, G., *Even krijten (2)*, Nieuwe Wiskrant 2, 3, 1983, p. 49-51.
- Smid, H. J., Verweij, A., *Ruimte, meetkunde en inzicht*, Nieuwe Wiskrant 2, 2, 1982, p. 29-34.
- Streefland, L., *Grafieken inhoud geven (2)*, Nieuwe Wiskrant 3, 3, 1984, p. 29-31.
- Ven, A. van de, *De rol van voorstellingen en materiële handelingen bij wiskunde-onderwijs aan een blinde leerling*, Euclides 56, 4, p. 145-151.
- Verhage, H., *Ruimtelijk inzicht, een verwaarloosd gebied?*, Nieuwe Wiskrant 2, 1, 1982, p. 22-28.
- Vredenduin, P. G. J., *Leerplanontwikkeling onderweg 2a en 2b*, Euclides 57, 2, 1981, p. 41-60.

Over de auteurs:

Jan Kroon studeerde wiskunde in Utrecht en was tot voor kort als docent verbonden aan de Christelijke Lerarenopleiding Zwolle.

Peter van 't Riet is hoofddocent wiskunde aan de Christelijke Lerarenopleiding Zwolle en publiceerde eerder in Euclides over setvorming en over kennisniveaus.

Annette van der Wal is vierde-jaarsstudent wis- en natuurkunde aan de Christelijke Lerarenopleiding Zwolle. Zij heeft het lesmateriaal waarover dit artikel gaat ontworpen en op de acht leerlingen uitgeprobeerd.